# 逻辑回归

统计学习泰斗Trevor Hastie曾经说过：“每一个机器学习研究者应该像熟悉自家后院一样熟悉线性模型”。线性模型是许多非线性模型的基础。它良好的数学结构为理解非线性模型提供了深刻的洞见。神经网络的基本组成单元——神经元，正是一个线性模型。本书对于神经网络的介绍从线性模型开始。

* 1. **作为一个神经元的逻辑回归**

我们以逻辑回归（logistic regression）为例讨论线性模型。假如样本由n个数值型特征组成：,逻辑回归模型的计算式是：

（1.1）

式中将各个特征乘上对应的权重系数后相加再加上，称作偏置（bias）。这称为对的一个仿射变换（affine transform）。下文用表示这个仿射变换的结果。仿射变换的几何意义将在下一节介绍。

对施加logistic函数：

（1.2）

logistic函数的图像是一条型曲线（sigmoid curve）。当趋向于负无穷时函数值趋向于0；当趋向于正无穷时函数值趋向于1。logistic函数值在(0,1)区间内。当时函数值是0.5。如图1.1所示。

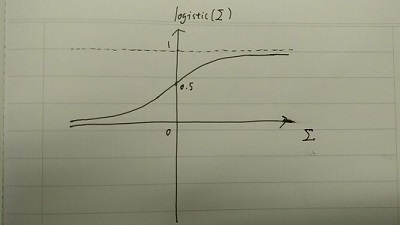


图1-1 logistic函数的图形

在二分类问题中，用n个数值型特征表示一个样本，例如用体重、身高、年龄表示一个人，而且这些样本属于两个互斥的类别——A类或B类。如果要求模型告诉我们某一个样本属于哪一类，则逻辑回归的输出可作为样本属于A类的概率：

（1.3）

因为样本必属于A类或者B类，且不能既属于A类又属于B类，所以属于A类的概率与属于B类的概率之和为1。于是样本属于B类的概率就是：

（1.4）

A 类与 B 类概率之比的对数（以 e 为底）是：

（1.5）

根据模型给出的概率判定样本类别的决定权在人。如果规定当类的概率大于0.5，即A类概率大于B类概率时判定为A类，那么根据公式（1.5）有：

（1.6）

以0.5为概率阈值时，类别的判定取决于是否大于0。大于0具有什么几何意义？ 逻辑回归为什么属于线性模型？将在下文揭晓。在那之前我们先看看逻辑回归的一种图示。如图1-2所示。

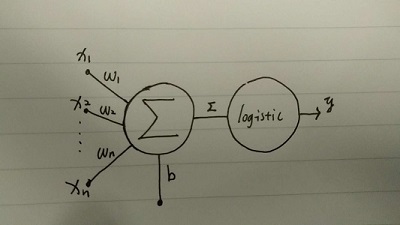


图1-2 逻辑回归的神经元表示

将输入值加权求和再加偏置之后施加logistic函数——该图示表达的就是逻辑回归。在人工神经网络（本书以下省略人工二字）语境下，图示的结构就是一个神经元。在这里logistic函数被称为激活函数（activation function）。激活函数不限于logistic函数。如果激活函数取阶跃函数：

（1.7）

这就是最早的神经元模型——感知机（perceptron）。感知机这个名称一直流传下来，以至于今天多层全连接神经网络（multi-layer full connected network）还被称为 MLP （multi-layer perceptron）。关于激活函数的类型和性质本书后文还有阐述。无论取哪种激活函数，仿射+激活都是神经元的基本结构。

* 1. **基础向量几何**

神经元是神经网络乃至深度学习的基本砖石。在深入考察神经元的能力和局限之前有必要回顾一下基础的向量几何。

* + 1. **向量**

一个包含n个数值型特征的样本可用一个n维向量表示：

（1.8）

本书用粗斜体小写字母表示向量，例如,。斜体小写字母表示标量，例如，或。用下标表示向量的分量，例如表示向量的第2分量。n是分量的个数。样本有多少特征就有多少分量。本书向量指列向量（分量竖着排列）。有时为了省纸面空间把列向量写成行向量的转置（transpose），如公式（1.8）第二个等号后。转置就是将行向量变成列向量，或将列向量变成行向量：

（1.9）

本书阐述时用2或3维维量，因为这利于可视化。在现实中样本的特征数量会远远超过3，但是理论结果可以扩展到任意维度。

如果将各个分量看作坐标值，那么向量表示坐标系上的一个点（point）。也可以看作是从原点指向这个点的一个有长度有方向的“箭头”。这二者都是向量的几何表现形式，如图1-3所示。论述中根据视角不同采用这两种表现形式。

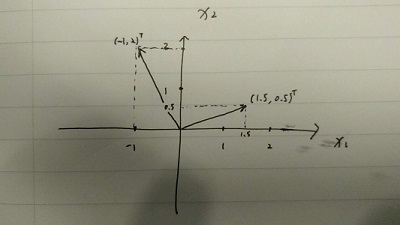


图1-3 向量的几何表示

* + 1. **向量的和、数乘与零向量**

向量可以求和。令和是两个相同维数的向量，定义它们的和是向量：

（1.10）

即将和的对应分量相加作为的分量。如果用“箭头”来表示向量，那么是以和为相邻两边组成的平行四边形的对角线，从原点指向相对的顶点。该顶点也是的点表示。如图1-4所示。

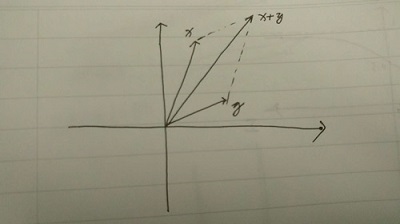


图1-4 向量和的几何表示

可以用一个标量（实数） 去乘一个向量，即向量的数乘。定义为：

（1.11）

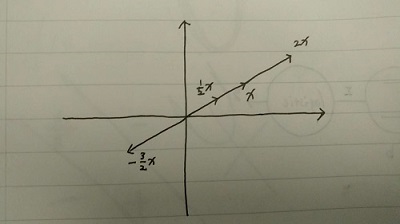


图1-5 向量的数乘——缩放

如图1-5所示，标量乘的几何意义是对向量进行缩放。用2乘向量，保持方向不变，长度变成了的2倍。用0乘任何向量得到“零向量”：

(1.12)

用表示零向量。是坐标系原点。与任何向量相加都得到该向量本身。如果用-1乘向量，有：

(1.13)

显然与相加得。向量的减法定义为：

(1.14)

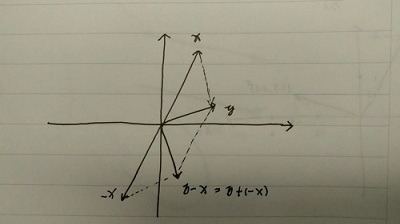


图1-6 向量减法图示——三角形的第三边

如图1-6所示，将平移，使其尾部与重合，头部与重合。则构成以和为临边的三角形的第三边。

向量作为“箭头”是有长度的。这个长度是向量表示的点与原点的距离。对于2维向量来说长度是：

（1.15）

3维乃至更高维依此类推。

* + 1. **向量的内积、模与投影**

向量和的内积（inner product）的定义是：

（1.16）

也就是将和的对应分量相乘再加和。 于是与自身的内积就是：

（1.17）

与自身的内积一定大于等于0。只有当的所有分量都是0 ，即时它与自身的内积为0。将向量的模定义为与自身的内积的平方根：

(1.18)

当n为2时与公式1.15中定义的2维向量长度一致。所以可以将任意维向量的“长度”定义为模的平方根。向量的长度是：

（1.19）

用标量乘得到向量。向量的长度为1，方向与一致。也就是将缩放到长度1。长度为1的向量称为单位向量（unit vector）。

对于2维或3维的情况，上节提到构成以和为临边的三角形的第三边。的模就是该三角形第三边的长度。三角形第三边长度可用余弦公式求得：假如三角形三条边长是。和之间的夹角是，则是：

（1.20）

当时，公式（1.20）就是毕达哥拉斯定理。将三角形的边长代换为向量长度，有：

(1.21)

根据模的定义将上式展开并消除等号两边相同项，得到：

(1.22)

向量和的内积等于它们的长度之积再乘以它们之间夹角的余弦。在2或3维上向量之间的夹角有直观的定义，运用余弦定理得到公式（1.22）。在更高维度上向量的夹角反过来由公式（1.22）定义。如果向量和的内积为0，则它们之间夹角的余弦是0，则夹角是。在这种情况下称和正交（orthogonal）。如图1-7所示。若和都不是，则它们的“箭头”互相垂直。与任何向量正交。

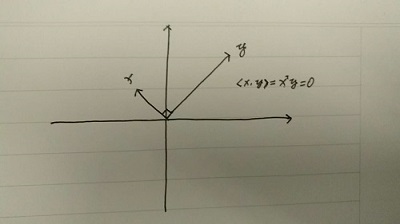


图1-7 向量正交

如果和之间夹角为，那么是向方向的投影长度，如图1-8所示。它等于。如果是单位向量，则向方向的投影长度就是。

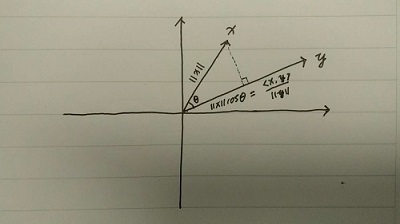


图1-8 向量投影

如果把列向量看作矩阵，向量的内积可以用矩阵乘积表示：

（1.23）

* + 1. **线性空间、基和线性变换**

对任何一个n维向量可以进行如下分解：

（1.24）

每一个是一个n维向量，其第个分量是1，其余分量都是0。称可以被线性表出。任意n维向量都可以被线性表出。而中的任何一个向量都无法由其他 线性表出。这是因为除了，其他向量的第个分量都是0。这种情况称线性独立（linear independent）。

全体n维向量构成n维线性空间 。非严格地说，线性空间是向量的集合，其中全部向量都可以由一组线性独立的向量线性表出。这组向量是该线性空间的一组基（basis）。基向量的个数是该线性空间的维数。 是的一组基。或者说张成了。

称为的标准基。除标准基外，任意n个线性无关的向量都能构成的基。因为是线性独立的，所以其中任一个都无法由线性表出。可以分解成两个向量之和。其中可由线性表出，而正交（垂直于）每一个。 提供了其他无法提供的某个方向的信息，为构成做出了它独有的贡献。

现在介绍线性变换（linear transform）。如果变换是线性的，则对于任两个向量和以及任两个实数和有：

(1.25)

一个重要结论是：如果是线性变换，则必存在一个向量，对任意向量有：

（1.26）

只要是线性变换，它执行的计算一定是用某个向量去内积输入向量。这样构造：

（1.27）

的第分量是对标准基第个向量施加得到的标量值。由于是线性变换，有：

（1.28）

这就证明了公式（1.26）的结论。线性变换的图像一定过原点，因为：

(1.29)

* + 1. **直线、（超）平面与仿射变换**

对于任意，令为任意与内积是常数的向量：

(1.30)

也就是说满足。即向方向的投影是常数。如果是2维的，将其看作二维空间中一个点，则这样的点都位于垂直于的一条直线上。如图1-9所示。

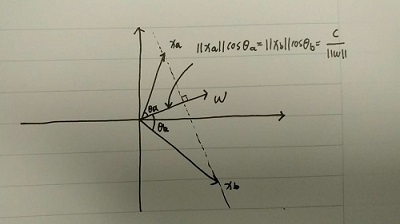


图1-9 二维空间中与特定非零向量内积相同的所有点位于垂直于该向量的直线上

在3维空间中与某内积为常数的点构成垂直于的平面。如图1-10所示。在更高维空间中这样的点构成垂直于的超平面（hyperplane）。

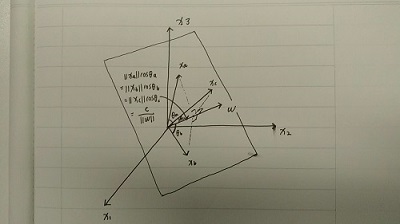


图1-10 三维空间中与特定非零向量内积相同的所有点位于垂直于该向量的平面上

称为直线/（超）平面的法向量（norm）。对于任意非0实数，也是同一个直线/（超）平面的法向量。因为该直线/（超）平面上任意向量与的内积也为常数：

(1.31)

1.1节曾提到仿射变换，将其重新写在这里：

(1.32)

如果自变量是2维，将移到等号另一侧得到：

(1.33)

由公式（1.33）在 三维空间中所有满足式（1.32）的点与的内积为常数。也就是说仿射变换的图像是3维空间中一张平面。该平面法向量是。当时的值是，称为该平面的截距。由公式（1.33）可以看出仿射变换是线性变换加上一个常量。线性变换的图像是截距的直线\（超）平面，它过原点。

若和的绝对值较大，则更贴近平面。以为法向量的平面较陡。反之若和的绝对值较小，则更贴近轴，以为法向量的平面较平。平面的倾斜程度与和的绝对值大小有关，也就是与的模有关。

是在平面上的投影。它的方向决定了平面的朝向。总之，是2维仿射变换的图像（3维空间中一张平面）的法向量。的模决定了平面的倾斜程度，的方向决定了平面的朝向。图1-11集中展示这几个概念。

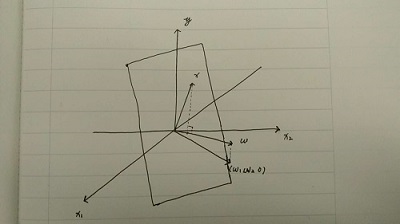


图1-11 法向量决定平面的朝向和倾角

仿射变换是一类最简单的变换。仿射变换的图像在自变量为1维的情况下是直线，在自变量为2维的情况下是平面，在更高维情况下是超平面。这类图像在各处的特性是相同的。想象一个平坦的斜坡。无论从斜坡上的哪一点出发，向同样的方向走都是同样的倾斜程度。

仿射函数是更复杂的函数在某一点局部的最粗糙的近似，称一阶近似。训练逻辑回归或神经网络的梯度下降法就是一种基于损失函数局部一阶近似特性的优化算法。这些内容本书后文将详加介绍。

* 1. **从几何角度理解逻辑回归的能力和局限**

回忆一下逻辑回归的表达式：

（1.34）

用我们现在的语言表述，它是对输入向量做仿射变换后再施以logistic函数。还是以2维为例，某条以为法向量的直线上的点与的内积为常量。所以对它们施加仿射变换后的值都相同，再施加logistic函数后的结果也都相同。逻辑回归先对输入向量用做仿射变换，这样就丢弃了在垂直于方向上的信息。于是逻辑回归的输出只在的方向上有变化；在垂直于的方向上无变化。如果用阈值去卡这个输出：

（1.35）

则只能得到垂直于的直线分界线。这也就是逻辑回归属于线性模型的原因。仿射变换是“罪魁祸首”。它先对信息进行了过滤。即使之后再施以形的logistic函数也于事无补。如图1-12所示。

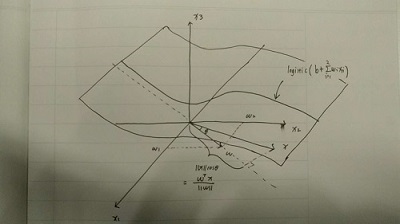


图1-12 单个神经元只能形成直线/超平面分界线/面

神经元可以选用其他激活函数。但只要激活函数仍是单调的，则只能形成一条直线分界线（在更高维情况下就是超平面分界面）。单调激活函数神经元无法处理异或问题（XOR）。因为异或问题是线性不可分的——无法用直线将正负样本点分隔开。如图1-13所示。

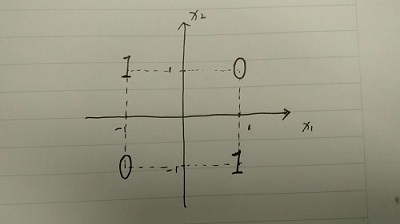


图1-13 异或问题

如果使用非单调函数作为激活函数，比如平方函数：

（1.36）

通过调整的方向可以解决异或问题。如图1-14所示。

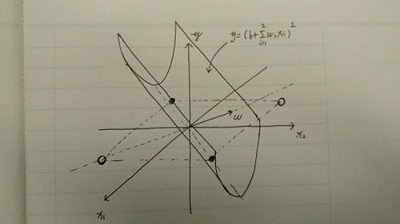


图1-14 使用平方函数激活函数的单个神经元解决异或问题

但是公式（1.36）的能力也仅限于用两条平行直线去分割自变量空间。就算使用正弦sin函数作为激活函数也只能形成无数条平行分割线。它们对于例如同心圆状分布的数据是无能为力的。如图1-15所示。

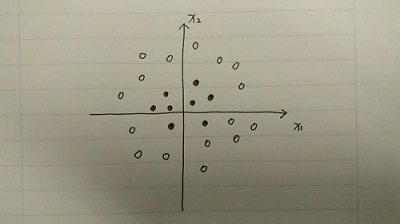


图1-15 同心圆状数据

同心圆数据正类点在中央，负类点围绕在外围。在平面内不存在一条直线将正负两类点分开。该数据含有各个方向的分类信息，而单个神经元只取一个方向的信息，所以无法用一个神经元分开正负两类样本点。要想获得超越线性的能力，必须将多个神经元连接成网络。允许多个神经元合作形成非线性分界线。这是本书第二部分的内容，这里暂且不表。

**小结**

本章介绍了作为线性模型的逻辑回归模型。它同时也是一个神经元。在回顾了必要的向量几何背景知识后，我们从几何角度阐述了逻辑回归的能力及其限制。我们知道逻辑回归如何划分自变量空间取决于权值向量和偏置。但本章没有阐述对于某一个特定分类问题如何确定和的取值。这就是逻辑回归模型的训练问题。